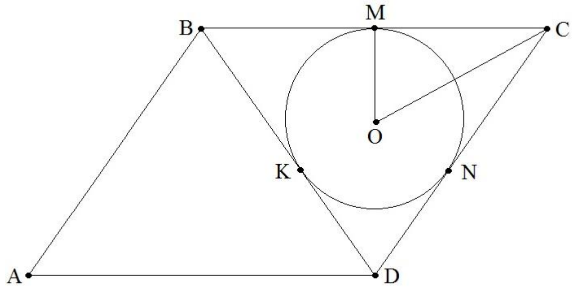
ПРАВИЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ

второго (заключительного) этапа Республиканской школьной олимпиады «Будущее Республики» по общеобразовательному предмету «Математика», проведенного 06 февраля 2021 г.
ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет»

1. Периметр параллелограмма ABCD равен 26. Величина угла ABC равна 120^0. Радиус окружности, вписанной в треугольник BCD равен $\sqrt{3}$. Найти длины сторон параллелограмма, если известно, что длина стороны AD больше длины стороны AB.

Решение:



1. $\angle BCD = 180^\circ - \angle ABC$ (по свойству параллельных прямых AB, CD и секущей BC.
$\angle BCD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

2. Рассмотрим треугольник BCD. Пусть O – центр вписанной окружности, которая касается сторон треугольника в точках M, N и K. Следовательно OC – биссектриса $\angle BCD$, т.е. $\angle BCO = \dfrac{1}{2} \cdot \angle BCD \Rightarrow \angle BCO = \dfrac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$.

3. Т.к. M - точка касания окружности и прямой BC, то по свойству касательной и окружности $OM \perp BC \Rightarrow \angle OMC = 90^\circ$.

4. Рассмотрим прямоугольный треугольник OMC.
$$ctg\angle MCO = \frac{MC}{OM} \Rightarrow MC = OM\, ctg\angle MCO \Rightarrow MC = \sqrt{3}\, ctg\, 30^\circ = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3.$$

5. По свойству касательных, проведённых из одной точки к окружности, получим $ND = KD;\ KB = MB;\ MC = NC = 3$.

6. По условию задачи периметр параллелограмма $ABCD$ равен 26, тогда
$P_{ABCD} = 2(BC + CD)$, то $BC + CD = 13$.

7. Из 5 и 6 получим
$$BD = KB + KD = MB + ND = BC - MC + CD - NC = 13 - 3 - 3 = 7.$$

8. Рассмотрим треугольник BCD. По теореме косинусов получим
$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2\,BC \cdot CD \cdot \cos\angle BCD$$
$$7^2 = BC^2 + CD^2 - 2\,BC \cdot CD \cdot \cos 60^\circ$$
$$49 = BC^2 + CD^2 - BC \cdot CD.$$

9. Сведём решение задачи к решению системы.
Пусть $BC = x$, $CD = y$, тогда из 6 и 8 получим систему
$$\begin{cases} x + y = 13 \\ x^2 + y^2 - xy = 49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 13 - y \\ (13 - y)^2 + y^2 - (13 - y)y = 49 (*) \end{cases}$$

Решим уравнение $(*)$

$$(13-y)^2+y^2-(13-y)y=49 \quad \Rightarrow y^2-13y+40=0$$

$$\left[\begin{array}{l} y_1=5 \\ y_2=8 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x=13-y \\ \left[\begin{array}{l} y_1=5 \\ y_2=8 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y_1=5 \\ x_1=8 \end{cases} \\ \begin{cases} y_2=8 \\ x_2=5 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Т.к. по условию длина стороны AD больше длины стороны AB, а $AD=BC$, а $AB=CD$, то $BC>CD \Rightarrow x>y$, т.е. $AD=BC=8$, а $AB=CD=5$.

Ответ: 5, 8.

2. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt[3]{x+3}}{x}+\frac{\sqrt[3]{x+3}}{3} \le \sqrt[3]{3x}.$$

Замечаем, что $x \ne 0$. Рассмотрим случаи:

1. Способ:

1. $x>0$. Разделив обе части неравенства на $\sqrt[3]{3x}$, получим

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{3}+\frac{1}{x}}}{x}+\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{3}+\frac{1}{x}}}{3} \le 1. \qquad (1)$$

Сделаем замену $y^3=\frac{1}{3}+\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{1}{y^3-\frac{1}{3}}$. Тогда неравенство (1) примет вид

$$y\left(y^3-\frac{1}{3}\right)+\frac{y}{3} \le 1 \Rightarrow y^4 \le 1 \quad \Rightarrow \quad |y| \le 1 .$$

Для рассматриваемого случая получаем

$$0<\frac{1}{3}+\frac{1}{x} \le 1 \Rightarrow \quad x \ge \frac{3}{2}.$$

2. $x<0$. Поступим аналогично, поменяв знак неравенства

$$|y| \ge 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{3}+\frac{1}{x}\right| \ge 1 \Rightarrow -\frac{3}{4} \le x<0.$$

Ответ: $x \subset \left[-\frac{3}{4};\, 0\right) \cup \left[\frac{3}{2};\infty\right)$.

2. Способ:

Представим неравенство в виде $\sqrt[3]{x+3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\right) \le \sqrt[3]{3x}$. Сделаем замену $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}$ и возведём обе части неравенства в куб. Получим, как и в первом способе, неравенство для переменной y.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (3x+y)^{x-y} = 9 \\ 324^{\frac{1}{x-y}} = 2(9x^2+6xy+y^2) \end{cases}.$$

Из второго уравнения находим $324 = 2^{x-y}(3x+y)^{2(x-y)}$.

Тогда с учётом первого уравнения получаем $324 = 2^{x-y}81 \Rightarrow x-y=2$.

Получена система

$$\begin{cases} (3x+y)^{x-y} = 9 \\ x-y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3x+y)^{2} = 9 \\ x-y=2 \end{cases}.$$

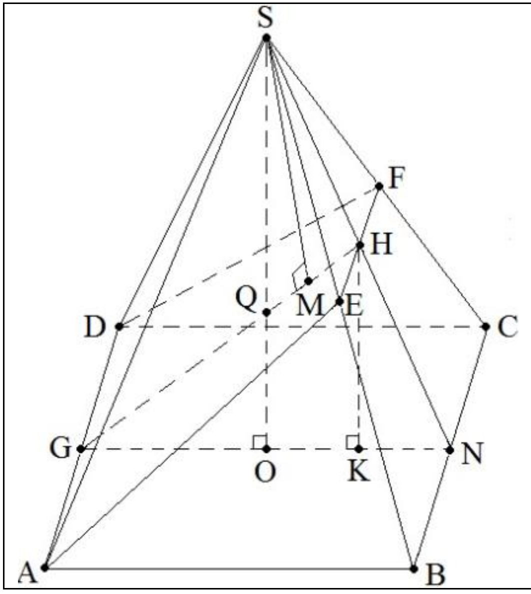
Решая последнюю систему, получаем $x_1 = -\frac{1}{4}, y_1 = -\frac{9}{4}; x_2 = \frac{5}{4}, y_2 = -\frac{3}{4}$.

Выполняя проверку, убеждаемся в правильности ответа:

$x_1 = -\frac{1}{4}, y_1 = -\frac{9}{4}; x_2 = \frac{5}{4}, y_2 = -\frac{3}{4}$.

4. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна a, а высота h. Через сторону основания и середину скрещивающегося с ней бокового ребра проведено сечение. Определить расстояние от вершины пирамиды до плоскости этого сечения.

Решение:



1. $SABCD$ правильная четырёхугольная пирамида. $ABCD$ - квадрат со стороной a. Диагонали квадрата пересекаются в точке O, т.е. SO - высота пирамиды.

2. Построим сечение. В качестве стороны, через которую проходит сечение, возьмём сторону AD, а в качестве скрещивающегося с ней бокового ребра SB, середина которого точка E. Проведём среднюю линию EF треугольника SBC, где F - середина SC. По свойству средней линии $EF \,||\, BC$. Т.к. $ABCD$ - квадрат, то $AD \,||\, BC$. Следовательно $EF \,||\, AD$.

3. Проведём через точку O параллельно AB прямую, которая пересекает стороны BC и AD соответственно в точках N и G. Т.к. $ABCD$ - квадрат, то N - середина BC, а G - середина AD, а $GN \perp BC$.

4. Рассмотрим треугольник SBC. Из 3 получим SN - медиана треугольника.

Т.к. $SABCD$ - правильная четырёхугольная пирамида, то

ΔSBC - равнобедренный с основанием BC, т.е. SN не только медиана, но и высота. Значит $SN \perp BC$.

5. Опустим перпендикуляр из вершины S на GH. В силу того, что сечение SNG разделяет пирамиду на две симметричные части, перпендикуляр SM будет перпендикулярен плоскости сечения.

6. Из 3 получим $GN = AB \Rightarrow GO = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.

7. Рассмотрим ΔGSN, в котором GH и SO - медианы, а Q - точка пересечения медиан, т.е. по свойству медиан

$$\frac{SQ}{QO} = \frac{2}{1} \Rightarrow QO = \frac{SQ}{2} \Rightarrow SO = SQ + QO = SQ + \frac{SQ}{2} = \frac{3SQ}{2} \Rightarrow SQ = \frac{2SO}{3} = \frac{2h}{3},$$ а $QO = \frac{h}{3}$.

8. Рассмотрим ΔGOQ. По теореме Пифагора $QG = \sqrt{GO^2 + QO^2}$, т.е. $QG = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{9}}$.

9. $\Delta SMQ \sim \Delta GOQ$, как прямоугольные треугольники с равными острыми углами ($\angle GQO = \angle SQM$ - как вертикальные углы).

10. Из 9 следует $\frac{SM}{GO} = \frac{SQ}{QG} \Rightarrow SM = GO \cdot \frac{SQ}{QG}$, т.е.

$$SM = \frac{a}{2} \cdot \frac{\frac{2h}{3}}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{9}}} = \frac{2ah}{\sqrt{9a^2 + 4h^2}}.$$

Ответ: $SM = \frac{2ah}{\sqrt{9a^2 + 4h^2}}$

5. При каких значениях параметра p уравнение $\sqrt{p + \sqrt{p + 2x - x^2}} = 2x - x^2$ (1) имеет решение?

Сделаем замену $y = 2x - x^2$, $0 \le y \le 1$ с учётом его выражения через x.
Возведём (1) в квадрат

$$p + \sqrt{p + y} = y^2 \Rightarrow \sqrt{p + y} = y^2 - p. \qquad (2)$$

Возведём (2) ещё раз в квадрат

$$\begin{cases} y^4 - 2py^2 - y + p^2 - p = 0 \\ 0 \le y \le 1 \\ y^2 - p \ge 0 \end{cases}. \qquad (3)$$

Левую часть уравнения (3) представим как квадратный трехчлен относительно p и разложим на множители

$$\begin{cases} (p - y^2 - y - 1)(p - y^2 + y) = 0 \\ 0 \le y \le 1 \\ y^2 - p \ge 0 \end{cases}. \qquad (4)$$

Первый сомножитель в уравнении (4) всегда меньше нуля тогда

$$\begin{cases} p - y^2 + y = 0 \\ 0 \le y \le 1 \\ p \le y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_{1,2} = \dfrac{1}{2} \pm \sqrt{\dfrac{1}{4} + p} \\ 0 \le y \le 1 \\ p \ge -\dfrac{1}{4} \\ p \le 0 \end{cases}$$

Ответ $p \subset \left[-\dfrac{1}{4}; 0\right]$