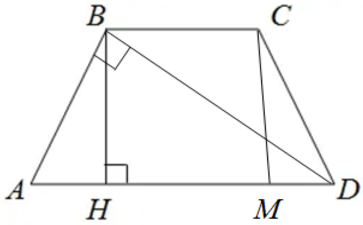
ПРАВИЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ

первого (отборочного) этапа Республиканской школьной олимпиады «Будущее Республики» по общеобразовательному предмету «Математика», проведенной 16 января 2021 г.

ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет»

РЕШЕНИЯ ПРИМЕРОВ И ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ «БУДУЩЕЕ РЕСПУБЛИКИ» ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

1. Основания BC и AD равнобокой трапеции $ABCD$ равны соответственно 3 и 11. Диагональ трапеции DB перпендикулярно боковой стороне AB. Найдите высоту и боковую сторону трапеции.



1. Проведём высоты трапеции BH и CM. Известно, что $AH = MD = \dfrac{AD - BC}{2}$. Получим $AH = MD = \dfrac{11-3}{2} = 4$.
Тогда $HD = AD - AH = 11 - 4 = 7$.
2. Рассмотрим ΔABD - прямоугольный треугольник, так как диагональ трапеции DB перпендикулярна боковой стороне AB. AD - гипотенуза треугольника, а BH - высота, опущенная на гипотенузу, т.е. $BH = \sqrt{AH \cdot HD}$. Поэтому получаем $BH = \sqrt{4 \cdot 7} = 2\sqrt{7}$
3. Рассмотрим прямоугольный треугольник ΔABH. Найдём AB, по теореме Пифагора: $AB = \sqrt{BH^2 + AH^2}$. Получим $AB = \sqrt{28+16} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$.
Ответ: $BH = 2\sqrt{7}$, $AB = 2\sqrt{11}$.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{x+6+2\sqrt{x+5}} + \sqrt{6+x-2\sqrt{x+5}} = 6.$$

I способ.
Возведём обе части уравнения в квадрат

$$x+6+2\sqrt{x+5}+2\cdot\sqrt{\left(x+6+2\sqrt{x+5}\right)\left(x+6-2\sqrt{x+5}\right)}+x+6-2\sqrt{x+5}=36;$$

$$2x+2\cdot\sqrt{x^2+12x+36-4x-20}=24;$$

Разделим обе части уравнения на 2 и приведём подобные члены

$$\sqrt{x^2+8x+16}=12-x;$$

Возведём в квадрат

$x^2+8x+16=144-24x+x^2$, откуда $x=4$.

Выполним проверку

$\sqrt{4+6+2\sqrt{4+5}}+\sqrt{6+4-2\sqrt{4+5}}=6$, откуда $6=6$.

Ответ: $x=4$.

II способ.

$$\sqrt{x+6+2\sqrt{x+5}} + \sqrt{6+x-2\sqrt{x+5}} = 6.$$

Выполним замену $\sqrt{x+5}=y$, $y \ge 0 \;\Rightarrow\; x=y^2-5$.

$$\sqrt{y^2-5+6+2y}+\sqrt{y^2-5+6-2y}=6;$$

$$\sqrt{y^2+2y+1}+\sqrt{y^2-2y+1}=6;$$

$\sqrt{(y+1)^2}+\sqrt{(y-1)^2}=6$;

$|y+1|+|y-1|=6$;

Раскроем модули с учётом, что $y+1>0$

а) $y\in[0;1]$

$y+1+1-y=6$;

$2\neq 6$.

б) $y\in(1;\infty)$

$y+1+y-1=6$;

$2y=6 \ \Rightarrow\ y=3$.

Тогда

$\sqrt{x+5}=3$;

$x+5=9 \ \Rightarrow\ x=4$.

Выполним проверку

$\sqrt{4+6+2\sqrt{4+5}}+\sqrt{6+4-2\sqrt{4+5}}=6$, откуда $6=6$.

Ответ: $x=4$.

3. Решить уравнение

$$6\sqrt[x]{9}+6\sqrt[x]{4}-13\sqrt[x]{6}=0.$$

Преобразуем уравнение

$6\left(3^2\right)^{\frac{1}{x}}-13(2\cdot 3)^{\frac{1}{x}}+6\left(2^2\right)^{\frac{1}{x}}=0$;

$6\cdot 3^{\frac{2}{x}}-13\cdot 2^{\frac{1}{x}}\cdot 3^{\frac{1}{x}}+6\cdot 2^{\frac{2}{x}}=0$;

Данное уравнение разделим на $2^{\frac{2}{x}}$.

$6\cdot\dfrac{3^{\frac{2}{x}}}{2^{\frac{2}{x}}}-13\cdot\dfrac{2^{\frac{1}{x}}\cdot 3^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{2}{x}}}+6\cdot\dfrac{2^{\frac{2}{x}}}{2^{\frac{2}{x}}}=0$;

$6\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{x}}-13\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}+6=0$;

Замена $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=y$, $y>0$.

$6y^2-13y+6=0$;

$D=(-13)^2-4\cdot 6\cdot 6=25$;

$y_{1,2}=\dfrac{13\pm 5}{12}$, следовательно $y_1=\dfrac{3}{2}$, $y_1=\dfrac{2}{3}$.

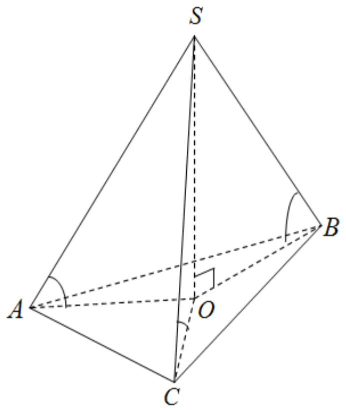
Тогда для нахождения x получаем

$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{x} = 1, \qquad x = 1$ не удовлетворяет обозначению корня *n*-й степени (*n*=2, 3, 4…).

$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{2}{3}, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}, \ \frac{1}{x} = -1, \ x = -1$, аналогично, не удовлетворяет обозначению корня.

Ответ: нет корней.

4. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 5, 6 и 8. Все боковые рёбра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60^0. Найти объём пирамиды.



1. Найдём площадь основания пирамиды (площадь ΔABC). Для этого воспользуемся формулой Герона:

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

$p = \dfrac{5+6+8}{2} = \dfrac{19}{2}$, тогда $S_{\Delta ABC} = \sqrt{\dfrac{19}{2} \cdot \dfrac{9}{2} \cdot \dfrac{7}{2} \cdot \dfrac{3}{2}} = \dfrac{3\sqrt{399}}{4}$.

2. ΔSOB, ΔSOA, ΔSOC - прямоугольные ($SO \perp (ABC)$,так как SO - высота пирамиды).

Следовательно $\angle SOB = \angle SOA = \angle SOC = 90^\circ$. $\angle SBO = \angle SAO = \angle SCO = 60^\circ$ (по условию задачи). SO- общая сторона для ΔSOB, ΔSOA, ΔSOC. Следовательно $\Delta SOB = \Delta SOA = \Delta SOC$, а значит $OB = OA = OC$, т.е. О – центр описанной окружности, а $OB = OA = OC = R$, где R – радиус описанной окружности.

3. Найдем радиус описанной окружности, используя формулу

$$S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S_{\Delta ABC}}$$

Получим $R = \dfrac{5 \cdot 6 \cdot 8}{4 \cdot \dfrac{3\sqrt{399}}{4}} = \dfrac{80}{\sqrt{399}}$.

4. Рассмотрим прямоугольный треугольник ΔSOB.

$$tg\angle SBO = \frac{SO}{OB} \Rightarrow SO = OB \cdot tg\angle SBO = \frac{80}{\sqrt{399}} \cdot tg\,60^\circ = \frac{80}{\sqrt{399}} \cdot \sqrt{3} = \frac{80}{\sqrt{133}}$$

5. Найдём объём пирамиды по формуле $V = \dfrac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SO$

Получим $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3\sqrt{399}}{4} \cdot \dfrac{80}{\sqrt{133}} = 20\sqrt{3}$

Ответ: $20\sqrt{3}$

5. Для каких значений a система $\begin{cases} x^2+y^2=2a \\ xy=a-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ имеет два решения?

Умножим второе уравнение системы на 2 и вычтем из первого. Система примет вид $\begin{cases} |x-y|=1 \\ xy=a-\dfrac{1}{2} \end{cases}$. Раскроем модуль:

а) $x>y \Rightarrow x-y=1$. Подставим $x=y+1$ во второе уравнение системы, получим

$y(y+1)=a-\dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; 2y^2+2y-2a+1=0$. Приравняем дискриминант полученного уравнения нулю $D=4-8(-2a+1)=0$. Тогда $a=\dfrac{1}{4}$.

Аналогично рассматривается случай б) $x\le y \Rightarrow x-y=-1$. Здесь также $a=\dfrac{1}{4}$.

Покажем, что при $a=\dfrac{1}{4}$ система имеет именно два решения.

Она принимает вид $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{1}{2} \\ xy=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$.

Из решения этой системы получаем $x=\pm\dfrac{1}{2}$ и в силу симметрии $y=\pm\dfrac{1}{2}$. Удовлетворяя последнему уравнению, выбираем:

$x_1=\dfrac{1}{2}$; $y_1=-\dfrac{1}{2}$; $x_2=-\dfrac{1}{2}$; $y_2=\dfrac{1}{2}$, что подтверждает правильное значение параметра $a=\dfrac{1}{4}$.

Ответ: $a=\dfrac{1}{4}$.