

ПРАВИЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ

первого (отборочного) этапа Республиканской школьной олимпиады «Будущее Республики» по общеобразовательному предмету «Астрономия»,
проведенной 16 января 2021 г.

ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет»

1. Марс находится в 1,5 раза дальше от Солнца, чем Земля. Какова продолжительность года на Марсе? Орбиты планет считать круговыми.

Дано:
$r_1 = 1,5 r_2$
$T_2 = 365,25 \text{ сут.}$
$T_1 - ?$

Запишем уточненный третий закон Кеплера:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} \cdot \frac{M_c + m_1}{M_c + m_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$$

m_1 – масса Марса, M_c – масса Солнца
 m_2 – масса Земли.

Т.к. $m_1 \ll M_c$, $m_2 \ll M_c$, то

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} \approx \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$$

a_1 и a_2 – большие полуоси. Если орбиты считать круговыми, то $a_1 \approx r_1$, $a_2 \approx r_2$

$$T_1 = T_2 \cdot \sqrt{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3}$$

$$T_1 = 365,25 \cdot \sqrt{1,5^3} = 371 \text{ (сут.)}$$

2. Ускорение силы тяжести на Марсе составляет $3,7 \text{ м/с}^2$, на Юпитере – 25 м/с^2 .
 Рассчитайте первую космическую скорость для этих планет.

Дано:
$g_1 = 3,7 \text{ м/с}^2$
$g_2 = 25 \text{ м/с}^2$
$v_1 - ?$

Обозначим массу планеты – M , массу спутника, вращающегося вокруг планеты – m .

Первая космическая скорость – это скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно стало спутником, т.е. двигалось по круговой орбите.

По закону всемирного тяготения планета притягивает тело с силой:

$$F = G \frac{mM}{R^2}, \quad (1)$$

R – радиус планеты, G – гравитационная постоянная.

По второму закону Ньютона:

$$F = ma_y = \frac{mv^2}{R} \quad (2)$$

Приравняем (1) и (2):

$$G \frac{mM}{R^2} = \frac{mv^2}{R}; \quad v = \sqrt{\frac{GM}{R}}, \quad (3)$$

Сила всемирного тяготения сообщает телу ускорение g . Тогда,

$$G \frac{mM}{R^2} = mg; \quad g = \frac{GM}{R^2}, \quad (4)$$

Преобразуем (3):

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R^2} \cdot R} = \sqrt{gR} = \sqrt{g \frac{d}{2}}, \quad (5)$$

По справочным данным определяем диаметры планет:

Марс – $d_1 = 6794 \text{ км} = 6,794 \cdot 10^6 \text{ м}$;

Юпитер - $d_2 = 142800 \text{ км} = 142,8 \cdot 10^6 \text{ м}$.

$$v_1 = \sqrt{3,7 \cdot \frac{6,794 \cdot 10^6}{2}} = 3,55 \cdot 10^6 \text{ м/с}$$

$$v_2 = \sqrt{25 \cdot \frac{142,8 \cdot 10^6}{2}} = 42,25 \cdot 10^3 \text{ м/с}$$

3. Первая космическая скорость для некоторой планеты в 2 раза больше, чем для Земли, при этом плотности обеих планет одинаковы. Во сколько раз масса неизвестной планеты больше массы Земли?

Дано:
$\rho_1 = \rho_2 = \rho$
$v_1 = 2v_2$
$\frac{M_1}{M_2} = ?$

Запишем закон всемирного тяготения:

$$F = G \frac{mM}{R^2}, \quad (1)$$

M – масса планеты, m – масса спутника.

По II-му закону Ньютона:

$$F = ma = \frac{mv^2}{R} \quad (2)$$

Приравняем (1) и (2):

$$G \frac{mM}{R^2} = \frac{mv^2}{R}; \quad v = \sqrt{\frac{GM}{R}}, \quad (3)$$

Выразим массу планеты через плотность ρ и объем:

$M = \rho V$, Планету считаем шаром:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3; \quad M = \frac{4}{3} \pi \rho R^3 \quad (4)$$

Найдем радиус R ,

$$R = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho}}, \quad (4)$$

Подставим (4) в (3), получим:

$$v = \frac{GM}{\sqrt{\sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho}}}} = \sqrt{GM^3 \sqrt[3]{\frac{4\pi\rho}{3M}}}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{GM_1 \sqrt[3]{\frac{4\pi\rho}{3M_1}}}}{\sqrt{GM_2 \sqrt[3]{\frac{4\pi\rho}{3M_2}}}} = \sqrt{\frac{M_1}{M_2} \cdot \sqrt[3]{\frac{M_2}{M_1}}};$$

$$\frac{v_1}{v_2} = 2; (2^2)^3 = \left(\frac{M_1}{M_2} \cdot \sqrt[3]{\frac{M_2}{M_1}}\right)^3$$

$$64 = \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^3 \cdot \frac{M_2}{M_1} = \left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2;$$

$$\frac{M_1}{M_2} = 8$$

4. Рассмотрим таблицу, содержащую характеристики некоторых астероидов Солнечной системы.

Название астероида	Примерный радиус астероида, км	Большая полуось орбиты, а.е.*	Период обращения вокруг Солнца, земных лет	Эксцентриситет орбиты e^{**}	Масса, кг
Веста	265	2,37	3,63	0,091	$3,0 \cdot 10^{20}$
Эвномия	136	2,65	4,30	0,185	$8,3 \cdot 10^{18}$
Церера	466	2,78	4,60	0,077	$8,7 \cdot 10^{20}$
Паллада	261	2,78	4,61	0,235	$3,2 \cdot 10^{20}$
Юнона	123	2,68	4,36	0,256	$2,8 \cdot 10^{19}$
Геба	100	2,42	3,76	0,202	$1,4 \cdot 10^{19}$
Аквитания	54	2,79	4,53	0,238	$1,1 \cdot 10^{18}$

* – 1 а.е. составляет 150 млн км.

** – Эксцентриситет e орбиты определяется по формуле, $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, где b – малая полуось, a – большая полуось орбиты. $e = 0$ – окружность, $0 < e < 1$ – эллипс.

Проведите расчёты и на их основании выберите два утверждения, которые соответствуют характеристикам астероидов.

- 1) Средняя плотность астероида Аквитания составляет 700 кг/м^3 .
- 2) Вторая космическая скорость для астероида Веста составляет больше 11 км/с .
- 3) Астероид Юнона вращается по более «вытянутой» орбите, чем астероид Церера.
- 4) Астероид Геба движется по орбите Земли и представляет астероидную опасность.
- 5) Орбита астероида Паллада находится между орбитами Марса и Юпитера.

4. 1) Масса астероида Аквитания

$$m = 1,1 \cdot 10^{18} \text{ кг}$$

$$\text{Радиус } R = 54 \text{ км} = 5,4 \cdot 10^4 \text{ м}$$

$\rho = ?$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3m}{4\pi R^3} = \frac{3 \cdot 1,1 \cdot 10^{18}}{4 \cdot 3,14 \cdot 5,4^3 \cdot 10^{12}} = 1669 \text{ кг/м}^3$$

$$1669 \text{ кг/м}^3 \neq 700 \text{ кг/м}^3$$

Утверждение неверно

2) Масса астероида Веста

$$M = 3 \cdot 10^{20} \text{ кг, радиус } R = 265 \cdot 10^3 \text{ км}$$

$$v_2 = \sqrt{2} \cdot v_1, \quad v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}} \text{ - первая космическая скорость}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}},$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 3 \cdot 10^{20}}{265 \cdot 10^3}} = 275 \text{ м/с}$$

$$275 \text{ м/с} \neq 11 \text{ км/с}$$

Утверждение неверно

3) Выпишем значение эксцентриситетов:

для Юноны: $e_{ю} = 0,185$.

для Цереры: $e_{ю} = 0,077$.

Чем больше эксцентриситет, тем больше вытянута орбита.

$$0,185 > 0,077$$

Утверждение верно

$$\text{№4} = \text{№3} + \text{№5}$$

4.4) Большая полуось Земли $a_з = 1 \text{ а. е.}$

большая полуось Гебы $a_г = 2,42$.

$$1 \neq 2,42$$

астероид Геба не движется по орбите.

Утверждение неверно

5) Большие полуоси:

Паллада: $a = 2,78 \text{ а. е.}$

Расстояние от Марса до Солнца $r_м = 1,52 \text{ а. е.}$

Расстояние от Юпитера до Солнца $r_{ю} = 5,2 \text{ а. е.}$

$$1,5 < 2,78 < 5,2$$

Орбита астероида Паллада находится между орбитами Марса и Юпитера.

Утверждение верно

5. Рассмотрите таблицу, содержащую характеристики некоторых спутников планет Солнечной системы.

Название спутника	Радиус спутника, км	Радиус орбиты, тыс. км	Средняя плотность, г/см ³	Вторая космическая скорость, м/с	Планета
Луна	1737	384,4	3,35	2038	Земля
Фобос	около 12	9,38	2,20	11	Марс
Ио	1815	422,6	3,57	2560	Юпитер
Европа	1569	670,9	2,97	2040	Юпитер
Каллисто	2400	1883	1,86	2420	Юпитер
Титан	2575	1221,9	1,88	2640	Сатурн
Оберон	761	587,0	1,50	770	Уран
Тритон	1350	355,0	2,08	1450	Нептун

Проведите расчёты и на их основании выберите два утверждения, которые соответствуют характеристикам спутников планет.

- 1) Ускорение свободного падения на Обероне равно $7,7 \text{ м/с}^2$.
- 2) Первая космическая скорость для Тритона составляет примерно $1,03 \text{ км/с}$.
- 3) Объём Титана почти в два раза больше объёма Тритона.
- 4) Масса Луны меньше массы Ио.
- 5) Ио находится дальше от поверхности Юпитера, чем Каллисто.

5. 1) Вторая космическая скорость на Обероне

$$v_2 = 770 \text{ м/с}$$

$$R = 761 \text{ км} = 761 \cdot 10^3 \text{ м}$$

$g - ?$

Вторая космическая скорость связана с первой соотношением:

$$v_2 = \sqrt{2} \cdot v_1$$

Первая космическая скорость:

$$v_1 = \sqrt{gR}, \text{ Тогда: } v_2 = \sqrt{2gR},$$

$$g = \frac{v_2^2}{2R}$$

$$g = \frac{770^2}{2 \cdot 761 \cdot 10^3} = 0,4 \text{ м/с}^2$$

Это не равно $7,7 \text{ м/с}^2$.

Утверждение неверно

2) Вторая космическая скорость для Тритона

$$v_2 = 1450 \text{ м/с}$$

$v_1 - ?$

$$v_2 = \sqrt{2} \cdot v_1$$

$$v_1 = \frac{v_2}{\sqrt{2}} = \frac{1450}{\sqrt{2}} = 1028 \text{ м/с} = 1,03 \text{ км/с}$$

Это утверждение верно

$$3) R_1 = 2575 \text{ км (Титан)}$$

$$R_2 = 1350 \text{ км (Тритон)}$$

$$\frac{V_1}{V_2} ?$$

Планеты считаем шарами: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 = \left(\frac{2575}{1350}\right)^3 = 6,9 \neq 2$$

Утверждение: объем Титана в 2 раза больше объема Тритона – неверно.

$$5. 4) \text{ Масса шара: } M = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\rho_{\text{л}} = 3,35 \text{ г/см}^3$$

$$R_{\text{л}} = 1737 \text{ км}$$

$$\rho_{\text{ио}} = 3,57 \text{ г/см}^3$$

$$R_{\text{ио}} = 1815 \text{ км}$$

$$\frac{M_{\text{ио}}}{M_{\text{л}}} = \frac{\rho_{\text{ио}}}{\rho_{\text{л}}} \cdot \left(\frac{R_{\text{ио}}}{R_{\text{л}}}\right)^3 = \frac{3,57}{3,35} \cdot \left(\frac{1815}{1737}\right)^3 = 1,2 > 1$$

Масса Луны меньше массы ИО

Утверждение верно

5) Радиусы орбит

$$r_{\text{ио}} = 422,6 \cdot 10^3 \text{ км}$$

$$r_{\text{к}} = 1883 \cdot 10^3 \text{ км}$$

Радиус орбиты Ио меньше радиуса орбиты Коллисто, поэтому он находится ближе у Юпитеру.

Утверждение неверно